Meccanica Razionale

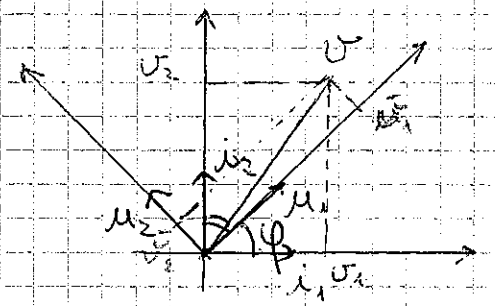
Dimostrazioni ed esercizi per argomento
per Scritto ed orale

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

1- Introduzione

- **Matrice 2×2 di rotazione:** $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Dim.



$$\underline{v} = v_1\underline{i}_1 + v_2\underline{i}_2 = \bar{v}_1\underline{u}_1 + \bar{v}_2\underline{u}_2$$

$$\bar{v}_1 = \underline{v}\cdot\underline{u}_1 = v_1(\underline{i}_1\cdot\underline{u}_1) + v_2(\underline{i}_2\cdot\underline{u}_1) = v_1\cos\varphi + v_2\sin\varphi$$

$|\underline{i}_1|\cdot|\underline{u}_1|\cdot\cos(\underline{i}_1\underline{u}_1) = 1\cdot 1\cdot\cos\varphi = \cos\varphi$

$$\bar{v}_2 = \underline{v}\cdot\underline{u}_2 = v_1(\underline{i}_1\cdot\underline{u}_2) + v_2(\underline{i}_2\cdot\underline{u}_2) = -v_1\sin\varphi + v_2\cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{u}_1\cdot\underline{i}_1 & \underline{u}_1\cdot\underline{i}_2\\ \underline{u}_2\cdot\underline{i}_1 & \underline{u}_2\cdot\underline{i}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

- **Coordinate polari e sferiche: relazioni importanti**
  - $\underline{v} = v_r\underline{u}_r + v_\varphi\underline{u}_\varphi$ dove $\underline{u}_r(\varphi)$ e $\underline{u}_\varphi(\varphi)$
  - $\underline{v} = v_\rho\underline{u}_\rho + v_\varphi\underline{u}_\varphi + v_\theta\underline{u}_\theta$ dove $\underline{u}_\rho(\varphi,\theta)$
  - relazioni: $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\tan\varphi = \frac{x_2}{x_1} \qquad \tan\theta = \frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}$$

- **Operazioni con vettori difficili da ricordare:**
  - $|\underline{c}| = |\underline{a}\wedge\underline{b}| = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin(\hat{a,b}) = \det\begin{pmatrix}\underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$

per i versori vale $\underline{i}_1\wedge\underline{i}_2 = \underline{i}_3$ e "a tornare" con il segno giusto

Dim: $(a_1\underline{i}_1 + a_2\underline{i}_2 + a_3\underline{i}_3)\wedge(b_1\underline{i}_1 + b_2\underline{i}_2 + b_3\underline{i}_3) =$

$= a_1b_1(\underline{i}_1\wedge\underline{i}_1) + a_1b_2\underline{i}_3 - a_1b_3\underline{i}_2 - a_2b_1\underline{i}_3 + a_2b_3\underline{i}_1 + a_3b_1\underline{i}_2 - a_3b_2\underline{i}_1 =$

$= \underline{i}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \underline{i}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \underline{i}_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$

$= \det\begin{pmatrix}\underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$ ← sviluppato secondo questa riga

- Significato: area parallelogr. lati $\underline{a}$ e $\underline{b}$
- <u>prodotto misto</u>: $(\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot(\underline{b}\wedge\underline{c}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
  → area parall.do d. lati $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$.
  Se $(\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot\underline{c} = 0$ $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ complanari
- <u>doppio prodotto vettoriale</u>:
  $(\underline{a}\wedge\underline{b})\wedge\underline{c} = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{a}(\underline{b}\cdot\underline{c}) \neq \underline{a}\wedge(\underline{b}\wedge\underline{c})$ e non sono legati
  → composizione di $\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}$ e trova nel piano di $\underline{a}$ e $\underline{b}$

2- Momenti - Vettori applicati

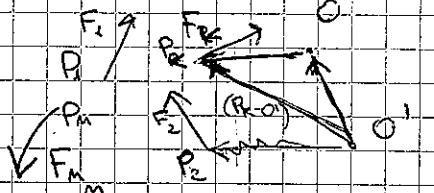
· Momento di un vettore rispetto a O (polo):

$$\mathcal{M}(O) = (P-O) \wedge F$$

· Legge di variazione del momento al variare del polo

$\rightarrow \mathcal{M}(O') = \mathcal{M}(O) - (O'-O) \wedge R$ → risultante

Dim:



$$\mathcal{M}(O') = \sum_{K=1}^{M} (P_K - O') \wedge F_K \quad \text{ma} \quad (P_K-O') = (O-O') + (P_K-O)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(O') = \sum_K ((P_K-O)+(O-O')) \wedge F_K =$$

$$= \sum_K (P_K-O) \wedge F_K + \sum_K (O-O') \wedge F_K =$$

$$= \mathcal{M}(O) + (O-O') \wedge \sum_K F_K = \mathcal{M}(O) + (O-O') \wedge R \quad \blacksquare$$

OSS: $R = 0 \Rightarrow \mathcal{M}(O') = \mathcal{M}(O)$

Teo

· Invariante componente parallela ad R del momento + Teorema dell'asse centrale + eq. asse centrale

→ 1) $\mathcal{M}(O) \cdot R = \text{cost}$

2) $\forall$ sistema di vettori applicati con $R \neq 0$ $\exists$ una retta, detta asse centrale, luogo dei punti A rispetto ai quali $\mathcal{M}(A) \parallel R$ (o $\mathcal{M}(A)$ è minima, o $\mathcal{M}(A)_\perp = 0$)

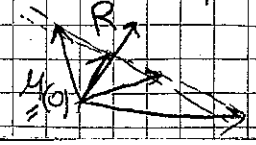
3) $A_0 - O = \frac{1}{R^2} \cdot R \wedge \mathcal{M}(O)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Dim

1) $\mathcal{M}(O') = \mathcal{M}(O) + (O-O') \wedge R$

$\mathcal{M}(O') \cdot R = \mathcal{M}(O) \cdot R + \underbrace{((O-O') \wedge R)}_{0} \cdot R = \mathcal{M}(O) \cdot R$



2) Si impone il parallelismo fra $\underline{M}(A)$ ed $\underline{R}$

$$\underline{M}(A) \wedge \underline{R} = 0$$

$$0 = \underline{M}(A) \wedge \underline{R} = \left[\underline{M}(0) - (A-0) \wedge \underline{R}\right] \wedge \underline{R} =$$

$$= \underline{M}(0) \wedge \underline{R} - \left[(A-0) \wedge \underline{R}\right] \wedge \underline{R}$$

Ricordando il risultato del doppio prodotto vettoriale:

$$(\underline{c} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{a} = \underline{b}(\underline{c} \cdot \underline{a}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

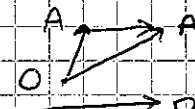
$$\Rightarrow 0 = \underline{M}(0) \wedge \underline{R} - \left[\underline{R}\left((A-0) \cdot \underline{R}\right) - (A-0) R^2\right]$$

Da cui si ricava:

$$(A-0) = \frac{1}{R^2}\left[\underline{R}\left[(A-0) \cdot \underline{R}\right] - \underline{M}(0) \wedge \underline{R}\right]$$ che, al variare di A implica l'esistenza di un luogo di punti.

Essendo $-\frac{1}{R^2}\underline{M}(0) \wedge \underline{R}$ una quantità nota e costante ed essendo $\frac{1}{R^2}\left[\underline{R}\left[(A-0) \cdot \underline{R}\right]\right]$ un vettore sempre parallelo ad R, possiamo concludere che la retta A-O è l'asse centrale da noi definita e cercata. ▨

3) Se considero un punto A' del luogo, verifico che questo si trova nella stessa retta di $A \parallel R$:



$(A'-A) \parallel R \Leftrightarrow (A'-A) \wedge R = 0$ ed è sempre verificato per come è stato analiticamente cercato il luogo.

Quindi ho infiniti A soluzione. Per trovare l'equazione più facile dell'asse centrale, posso cercare un A_0 soluzione tale che annulli il termine $\frac{1}{R^2}\left[\underline{R}\left[(A-0) \cdot \underline{R}\right]\right]$, ovvero che (A_0-0) sia $\perp R \Rightarrow$

$$(A_0-0) = \frac{1}{R^2}(R \wedge M(0))$$ ▨

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 338 9837745